



ΜΠ 322: ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΜΑΖΑΣ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ #2

Μαθηματικά που θα χρειαστείτε

Αφροδίτη Παπαδοπούλου
Δρ. Χημικός Μηχανικός
afpapadopoulou@isc.tuc.gr

ΜΠ 322: Μεταφορά Θερμότητας και Μάζας



□ Έστω $a, b, c, k, l, m, \dots$ **παράμετροι**:

Οι παράμετροι μπορεί να έχουν μονάδες! Π.χ. $a = 3 \text{ kg/s}$
 $b = 5 \text{ m}^2/\text{s}$
 $c = 7 [\text{ }]$

□ Έστω $u, v, w, \dots$ **συναρτήσεις** του x :

Π.χ. $u = u(x) = a+bx$
 $v = v(x) = e^{-cx}$
 $w = w(x) = \ln(x) + e^{-mx}$

Παράγωγοι

1^η Τάξης: $u' = u'(x) = \frac{du(x)}{dx} = \frac{du}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}$

ΜΠ 322: Μεταφορά Θερμότητας και Μάζας



Παράγωγοι

□ **Βασικοί κανόνες**

▪ $\frac{d}{dx}(a) = 0$ $\frac{d}{dx}\left(3 \frac{\text{kg}}{\text{s}}\right) = 0$

▪ $\frac{d}{dx}(ax) = a$ $\frac{d}{dx}\left(8 \frac{\text{kg}}{\text{mol}} x\right) = 8 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$

▪ $\frac{d}{dx}(bx^n) = nbx^{n-1}$ $\frac{d}{dx}(5x^2) = 5 \cdot 2x = 10x$
 $\frac{d}{dx}(5x^{-3}) = 5 \cdot (-3)x^{-3-1} = -\frac{15}{x^4}$

▪ $\frac{d}{dx}(u(x) \pm v(x) \pm w(x)) = \frac{d}{dx}(u(x)) \pm \frac{d}{dx}(v(x)) \pm \frac{d}{dx}(w(x))$

$u = u(x) = ax^2$ $\frac{d}{dx}(u \pm v \pm w) = \frac{d}{dx}(ax^2) \pm \frac{d}{dx}(bx^{-1}) \pm \frac{d}{dx}(c) =$
 $v = v(x) = bx^{-1}$
 $w = w(x) = c$
 $(2ax) \mp (bx^{-2}) \pm 0 = 2ax \mp \frac{b}{x^2}$

ΜΠ 322: Μεταφορά Θερμότητας και Μάζας



Παράγωγοι

□ **Βασικοί κανόνες**

▪ $\frac{d}{dx}(uv) = v \frac{d}{dx}(u) + u \frac{d}{dx}(v)$

$u = u(x) = ax+b$
 $v = v(x) = x^2+c\sqrt{x}$

$\frac{d}{dx}(uv) = \frac{d}{dx}((ax+b)(x^2+c\sqrt{x})) =$

$(x^2+c\sqrt{x}) \frac{d}{dx}(ax+b) + (ax+b) \frac{d}{dx}(x^2+c\sqrt{x}) =$

$(x^2+c\sqrt{x})a + (ax+b) \left(2x+c \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) =$

$ax^2+ac\sqrt{x} + 2ax^2+ac \frac{x}{2\sqrt{x}} + 2bx+bc \frac{1}{2\sqrt{x}} = \dots$

ΜΠ 322: Μεταφορά Θερμότητας και Μάζας



Παράγωγοι

□ Βασικοί κανόνες

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{1}{v^2} \left(v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx} \right)$$

$$u = u(x) = x^3$$

$$v = v(x) = x^2$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^3}{x^2} \right) = \frac{d}{dx} (x) = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{x^3}{x^2} \right) = \frac{1}{(x^2)^2} \left[x^2 \frac{d}{dx} (x^3) - x^3 \frac{d}{dx} (x^2) \right] = \\ &= \frac{1}{x^4} [x^2(3x^2) - x^3(2x)] = \frac{1}{x^4} [(3x^4) - (2x^4)] = \frac{x^4}{x^4} = 1 \end{aligned}$$

Πάντα πρέπει να ορίζουμε την περιοχή για την οποία ισχύει μια συνάρτηση, άρα και μια παράγωγος

ΜΠ 322: Μεταφορά Θερμότητας και Μάζας



Παράγωγοι

□ Βασικοί κανόνες

$$\frac{d}{dx} (u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} (u^{-n}) = -nu^{-n-1} \frac{du}{dx} = \frac{-n}{u^{n+1}} \frac{du}{dx}$$

$$u = u(x) = ax+b \quad \text{και } n=2$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (ax+b)^2 &= 2(ax+b)^{2-1} \frac{d}{dx} (ax+b) = \\ &= 2(ax+b) a = 2a^2x + 2ab \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (ax+b)^{-2} &= -2(ax+b)^{-2-1} \frac{d}{dx} (ax+b) = \\ &= -2(ax+b)^{-3} a = -\frac{2a}{(ax+b)^3} \end{aligned}$$

ΜΠ 322: Μεταφορά Θερμότητας και Μάζας



Παράγωγοι

□ Βασικοί κανόνες

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Chain Rule

Έστω $y = y(x) = \sqrt{x^2+1}$. Θέτουμε $u = u(x) = x^2+1$ επομένως $y = \sqrt{u}$.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d\sqrt{u}}{du} \cdot \frac{d(x^2+1)}{dx} = \frac{du^{1/2}}{du} \cdot \frac{d(x^2+1)}{dx} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot u^{1/2-1} \cdot (2x) = \frac{1}{2} \cdot u^{-1/2} \cdot (2x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot (2x) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} \sqrt{x^2+1} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

ΜΠ 322: Μεταφορά Θερμότητας και Μάζας



Παράγωγοι

□ Βασικοί κανόνες

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{dx/du}$$

Έστω $P = \frac{RT}{V} + \frac{a}{V^2}$ και ζητείται το $\frac{dV}{dP}$

$$\frac{dP}{dV} = \frac{d}{dV} \left(\frac{RT}{V} \right) + \frac{d}{dV} \left(\frac{a}{V^2} \right) = -\frac{RT}{V^2} - 2 \frac{a}{V^3} \Rightarrow \frac{dP}{dV} = -\frac{RTV+2a}{V^3}$$

$$\text{Άρα } \frac{dV}{dP} = -\frac{V^3}{RTV+2a}$$

ΜΠ 322: Μεταφορά Θερμότητας και Μάζας



Παράγωγοι

□ Βασικοί κανόνες

- $\frac{de^u}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$
 $u = e^{ax}$
 $\frac{de^{ax}}{dx} = e^{ax} \frac{d(ax)}{dx} = ae^{ax}$
- $u = e^{-bx}$
 $\frac{de^{-bx}}{dx} = e^{-bx} \frac{d(-bx)}{dx} = -be^{-bx}$
- $u = e^{-c/x}$
 $\frac{de^{-c/x}}{dx} = e^{-c/x} \frac{d(-cx^{-1})}{dx} = + \frac{c}{x^2} be^{-c/x}$
- $\frac{d \ln(u)}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$
 $u = ax$
 $\frac{d \ln(ax)}{dx} = \frac{1}{ax} \frac{d(ax)}{dx} = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$
- $\frac{da^{x^2+b}}{dx} = a^{\ln(a)} \frac{du}{dx}$
 $u = x^2+b$
 $\frac{da^{x^2+b}}{dx} = a^{x^2+b} \ln(a) \frac{d(x^2+b)}{dx} = a^{x^2+b} \ln(a) (2x)$
- $\frac{da^{x^2+b}}{dx} = 2a^{x^2+b} x \ln(a)$

ΜΠ 322: Μεταφορά Θερμότητας και Μάζας



Παράγωγοι

□ Άλλες συνηθισμένες παράγωγοι

- $\frac{d}{dx} \sin(u) = + \cos(u) \frac{du}{dx}$
 $\frac{d}{dx} \sinh(u) = + \cosh(u) \frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx} \cos(u) = - \sin(u) \frac{du}{dx}$
 $\frac{d}{dx} \cosh(u) = + \sinh(u) \frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx} \tan(u) = + \sec^2(u) \frac{du}{dx} = + \frac{1}{\cos^2(u)} \frac{du}{dx}$
 $\frac{d}{dx} \tanh(u) = + \operatorname{sech}^2(u) \frac{du}{dx}$

$$\text{όπου } \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\text{όπου } \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

ΜΠ 322: Μεταφορά Θερμότητας και Μάζας



Παράγωγοι

□ Practice makes perfect

- ★ <http://crystalclearmaths.com/wp-content/uploads/2015/11/Mastering-Derivatives.pdf>
Απλές ασκήσεις εύρεσης παραγώγων, ανά κατηγορία, και οι απαντήσεις.

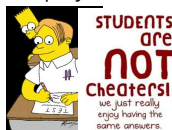
- ★ <http://faculty.bard.edu/~mbelk/math141/AdvancedDerivatives.pdf>

- ★ <https://www.math.mcgill.ca/rags/JAC/dobson/diff.pdf>

Πιο σύνθετες ασκήσεις εύρεσης παραγώγων και οι απαντήσεις.

- Ο εύκολος δρόμος (να τον χρησιμοποιείτε μόνο αφού έχετε προσπαθήσει, και δεν είστε βέβαιοι για την απάντηση)

- ★ <https://www.derivative-calculator.net/>



ΜΠ 322: Μεταφορά Θερμότητας και Μάζας



Ολοκληρώματα

□ Βασικοί κανόνες

- $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$ (αόριστο ολοκλήρωμα)
- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$ (ορισμένο ολοκλήρωμα)
- $\int_a^a f(x) dx = 0$
- $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$
- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
- $\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$
- $\int_a^b c dx = c(b-a)$

ΜΠ 322: Μεταφορά Θερμότητας και Μάζας



Ολοκληρώματα

□ Συνηθισμένα Ολοκληρώματα

- $\int k dx = kx + C_1$ (αόριστο ολοκλήρωμα, C_1 σταθερά ανεξάρτητη του x)
- $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C_1$ όπου $n \neq -1$
- $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C_1$
- $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C_1$
- $\int \ln(x) dx = x \ln|x| - x + C_1$
- $\int e^x dx = e^x + C_1$
- $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C_1$ ▪ $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C_1$

ΜΠ 322: Μεταφορά Θερμότητας και Μάζας



Ολοκληρώματα

□ Κανόνες Ολοκλήρωσης

❖ Αντικατάσταση (Αλλαγή μεταβλητής)

$$\int_a^b f[g(x)]g'(x) dx \xrightarrow[u=g'(x)dx]{u=g(x)} \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

▪ Παράδειγμα 1

$$\int_1^2 5x^2 \exp(x^3) dx = ? \quad \text{Θέτουμε } u=x^3 \Rightarrow du=3x^2 dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{1}{3} du$$

Τα όρια αλλάζουν $\Rightarrow x=1 \Rightarrow u=1^3=1$
 $x=2 \Rightarrow u=2^3=8$

$$\int_1^2 5x^2 \exp(x^3) dx = 5 \int_1^2 \exp(x^3)(x^2 dx) = 5 \int_1^8 \exp(u) \left(\frac{1}{3} du\right) = \frac{5}{3} [e^u]_1^8 = \frac{5}{3} (e^8 - e^1) =$$

$$\int_1^2 5x^2 \exp(x^3) dx \approx 4964$$

ΜΠ 322: Μεταφορά Θερμότητας και Μάζας



Ολοκληρώματα

□ Κανόνες Ολοκλήρωσης

❖ Αντικατάσταση (Αλλαγή μεταβλητής)

$$\int_a^b f[g(x)]g'(x) dx \xrightarrow[u=g'(x)dx]{u=g(x)} \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

▪ Παράδειγμα 2

$$\int_{h_0}^{h_1} \frac{1}{ax+b} dx = ? \quad \text{Θέτουμε } u=ax+b \Rightarrow du=adx \Rightarrow dx = \frac{1}{a} du$$

Τα όρια αλλάζουν $\Rightarrow x=h_0 \Rightarrow u=ah_0+b$
 $x=h_1 \Rightarrow u=ah_1+b$

$$\int_{h_0}^{h_1} \frac{1}{ax+b} dx = \int_{ah_0+b}^{ah_1+b} \frac{1}{u} \frac{du}{a} = \frac{1}{a} \left[\ln(u) \right]_{ah_0+b}^{ah_1+b} = \frac{1}{a} (\ln(ah_1+b) - \ln(ah_0+b))$$

$$\int_{h_0}^{h_1} \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{ah_1+b}{ah_0+b} \right)$$

ΜΠ 322: Μεταφορά Θερμότητας και Μάζας



Ολοκληρώματα

□ Κανόνες Ολοκλήρωσης

❖ Ολοκλήρωση κατά μέρη (ή κατά παράγοντες)

$$\int_a^b u dv = \left[uv \right]_a^b - \int_a^b v du$$

▪ Παράδειγμα 1

$$\int x \exp(-x) dx = ? \quad \text{Θέτουμε } u=x \Rightarrow du=dx$$

$$dv = \exp(-x) dx \Rightarrow v = -\exp(-x)$$

$$\int x \exp(-x) dx = \int u dv = x(-\exp(-x)) - \int -\exp(-x) dx + C_1 = -x e^{-x} + (-e^{-x}) + C_1$$

$$\int x \exp(-x) dx = -(x+1)e^{-x} + C_1$$

ΜΠ 322: Μεταφορά Θερμότητας και Μάζας



Ολοκληρώματα

Κανόνες Ολοκλήρωσης

❖ Ολοκλήρωση κατά μέρη (ή κατά παράγοντες)

$$\int_a^b u dv = \left[uv \right]_a^b - \int_a^b v du$$

▪ Παράδειγμα 2

$$\int_3^5 \ln(x) dx = ?$$

$$\text{Θέτουμε } u = \ln(x) \Rightarrow \begin{aligned} du &= \frac{1}{x} dx \\ dv &= dx \Rightarrow v = x \end{aligned}$$

$$\int_3^5 \ln(x) dx = \left[x \ln(x) \right]_3^5 - \int_3^5 x \cdot \frac{dx}{x} = \left[x \ln(x) \right]_3^5 - \left[x \right]_3^5 = \left[x \ln(x) - x \right]_3^5$$

$$\int_3^5 \ln(x) dx = (5 \ln 5 - 5) - (3 \ln 3 - 3) = 5 \ln 5 - 3 \ln 3 - 2 = 2.75$$

ΜΠ 322: Μεταφορά Θερμότητας και Μάζας



Ολοκληρώματα

Practice makes perfect

★ <https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/ma120/integralpractice1.pdf>

Απλές ασκήσεις εύρεσης αόριστων ολοκληρωμάτων, με υποδείξεις και απαντήσεις.

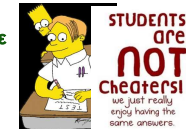
★ <http://faculty.bard.edu/~mbelk/math141/TrickyIntegrals.pdf>

★ <https://www.math.mcgill.ca/rags/JAC/dobson/int.pdf>
<https://www.math.mcgill.ca/rags/JAC/dobson/integral.pdf>

Πιο σύνθετες ασκήσεις εύρεσης ολοκληρωμάτων και οι απαντήσεις.

❑ Ο εύκολος δρόμος (να τον χρησιμοποιείτε μόνο αφού έχετε προσπαθήσει, και δεν είστε βέβαιοι για την απάντηση)

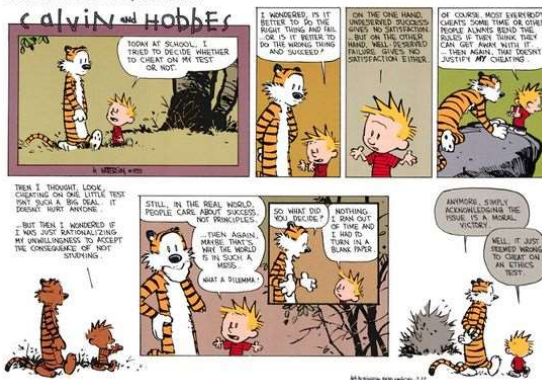
★ <https://www.integral-calculator.com/>



ΜΠ 322: Μεταφορά Θερμότητας και Μάζας



Calvin and Hobbes by Bill Watterson



ΜΠ 322: Μεταφορά Θερμότητας και Μάζας



Βασικές Διαφορικές Εξισώσεις

❑ Εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών

$$\text{❖ } P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

$$P(x) + Q(y) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$P(x) \frac{dx}{dy} + Q(y) = 0$$

$$\int P(x)dx = - \int Q(y)dy$$

▪ Σε περίπτωση αόριστου ολοκληρώματος προστίθεται σταθερά $C \neq f(x, y)$

$$\int P(x)dx = - \int Q(y)dy + C$$

▪ Αν γνωρίζουμε τα όρια των x , y , π.χ. για $x=x_1$, $y=y_1$ και για $x=x_2$, $y=y_2$ τότε:

$$\int_{x_1}^{x_2} P(x)dx = - \int_{y_1}^{y_2} Q(y)dy$$

ΜΠ 322: Μεταφορά Θερμότητας και Μάζας



Βασικές Διαφορικές Εξισώσεις

□ Εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών



$$P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

■ Παράδειγμα 1

$$a \frac{dC_A}{dt} + C_A + bC_A = w \quad a, b, w : \text{σταθερές}$$

Είναι της παραπάνω μορφής με :

$$a \frac{dC_A}{dt} + C_A + bC_A = w \rightarrow a \frac{dC_A}{dt} = - (C_A + bC_A - w) \Rightarrow \frac{dC_A}{(C_A + bC_A - w)} = -\frac{dt}{a}$$

$$C_A \leftrightarrow x \quad t \leftrightarrow y \quad \text{και} \quad C_A = C_A(t)$$

$$\text{Θέτουμε: } u = C_A(1+b) - w \Rightarrow du = (1+b) dC_A \Rightarrow dC_A = \frac{du}{1+b}$$

$$\frac{du}{(1+b)u} = -\frac{dt}{a} \Rightarrow \int \frac{du}{(1+b)u} = -\int \frac{dt}{a} + C_1 \Rightarrow \frac{1}{(1+b)} \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{a} \int dt + C_1$$

ΜΠ 322: Μεταφορά Θερμότητας και Μάζας



Βασικές Διαφορικές Εξισώσεις

□ Εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών



$$P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

■ Παράδειγμα 1

$$a \frac{dC_A}{dt} + C_A + bC_A = w \quad a, b, w : \text{σταθερές}$$

$$\frac{1}{(1+b)} \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{a} \int dt + C_1 \Rightarrow \frac{1}{(1+b)} \ln(u) = -\frac{1}{a} t + C_1 \quad u = C_A(1+b) - w$$

$$\frac{1}{(1+b)} \ln(C_A(1+b) - w) = -\frac{1}{a} t + C_1 \Rightarrow \ln(C_A(1+b) - w) = -\frac{(1+b)}{a} t + C_1 \Rightarrow$$

$$(C_A(1+b) - w) = \exp\left(-\frac{(1+b)}{a} t + C_1\right) \Rightarrow$$

$$C_A = \frac{w}{1+b} + \frac{1}{1+b} \exp\left(-\frac{(1+b)}{a} t + C_1\right)$$

ΜΠ 322: Μεταφορά Θερμότητας και Μάζας



Βασικές Διαφορικές Εξισώσεις

□ Εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών



$$P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

■ Παράδειγμα 1

$$a \frac{dC_A}{dt} + C_A + bC_A = w \quad a, b, w : \text{σταθερές, και όρια: } t=t_1 \quad C_A=C_{A1}$$

$$t=t_2 \quad C_A=C_{A2}$$

$$\frac{1}{(1+b)} \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{u} = -\frac{1}{a} \int_{t_1}^{t_2} dt$$

$$\frac{1}{(1+b)} \left[\ln(u) \right]_{u_1}^{u_2} = -\frac{1}{a} \left[t \right]_{t_1}^{t_2} \Rightarrow \frac{1}{(1+b)} \left(\ln\left(\frac{u_2}{u_1}\right) \right) = -\frac{1}{a} (t_2 - t_1)$$

$$u = C_A(1+b) - w$$

$$u_1 = C_{A1}(1+b) - w$$

$$u_2 = C_{A2}(1+b) - w$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+b)} \ln\left(\frac{C_{A2}(1+b) - w}{C_{A1}(1+b) - w}\right) = -\frac{1}{a} (t_2 - t_1) \Rightarrow \frac{C_{A2}(1+b) - w}{C_{A1}(1+b) - w} = \exp\left[-\frac{(1+b)}{a} (t_2 - t_1)\right]$$

$$C_{A2} = \frac{w}{(1+b)} + \left[\frac{C_{A1}(1+b) - w}{(1+b)} \right] \exp\left[-\frac{(1+b)}{a} (t_2 - t_1)\right]$$

ΜΠ 322: Μεταφορά Θερμότητας και Μάζας



Βασικές Διαφορικές Εξισώσεις

□ Γραμμική 1ης τάξης



$$\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = Q(x)$$

$$y \exp\left[\int P(x) dx\right] = \int Q(x) \exp\left[\int P(x) dx\right] dx$$

■ Παράδειγμα 1

$$2xy \frac{dy}{dx} + y^2 = ex$$

$$\text{Θέτουμε: } u = y^2 \Rightarrow du = 2y dy \Rightarrow dy = \frac{du}{2y}$$

$$x \frac{du}{dx} + u = ex \Rightarrow \frac{du}{dx} + \frac{u}{x} = \frac{ex}{x}$$

$$P(x) = \frac{1}{x} \quad Q(x) = \frac{ex}{x}$$

$$\int P(x) dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$$

$$\exp\left[\int P(x) dx\right] = e^{\ln(x)} = x$$

ΜΠ 322: Μεταφορά Θερμότητας και Μάζας



Βασικές Διαφορικές Εξισώσεις

□ Γραμμική 1^{ης} τάξης

$$\diamond \frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = Q(x)$$

$$y \exp \left[\int P(x) dx \right] = \int Q(x) \exp \left[\int P(x) dx \right] dx$$

▪ Παράδειγμα 1

$$2xy \frac{dy}{dx} + y^2 = ex$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{u}{x} = \frac{e^x}{x}$$

$$u = \int \frac{e^x}{x} dx$$

έχουμε θέσει: $u = y^2$

$$y^2 x = \int \frac{e^x}{x} dx = \int e^x dx + C_1$$

$$y^2 x = e^x + C_1 \Rightarrow$$

$$y^2 = \frac{1}{x} (e^x + C_1)$$

ΜΠ 322: Μεταφορά Θερμότητας και Μάζας



Βασικές Διαφορικές Εξισώσεις

□ Γραμμική ομογενής 2^{ης} τάξης

$$\diamond \frac{d^2y}{dx^2} + a \cdot \frac{dy}{dx} + b \cdot y = 0$$

Χαρακτηριστική εξίσωση:

$$m^2 + am + b = 0$$

Διακρίνουσα χαρακτηριστικής εξίσωσης:

$$\Delta = a^2 - 4b$$

Λύσεις χαρακτηριστικής εξίσωσης:

$$\Delta = 0 \Rightarrow \text{Δύο ίσες ρίζες} \\ m_1 = m_2 \in \mathbb{R}$$

$$m_1 = m_2 = -\frac{a}{2}$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow \text{Δύο άνισες ρίζες} \\ m_1 \neq m_2 \in \mathbb{R}$$

$$m_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad m_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow \text{Δύο άνισες μιγαδικές ρίζες} \\ m_1 \neq m_2 \in \mathbb{C}$$

$$m_1 = \frac{-a}{2} + i \sqrt{b - \frac{a^2}{4}} \quad m_2 = \frac{-a}{2} - i \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$$

ΜΠ 322: Μεταφορά Θερμότητας και Μάζας



Βασικές Διαφορικές Εξισώσεις

□ Γραμμική ομογενής 2^{ης} τάξης

$$\diamond \frac{d^2y}{dx^2} + a \cdot \frac{dy}{dx} + b \cdot y = 0$$

Λύση ομογενούς:

$$\Delta = 0 \Rightarrow \text{Δύο ίσες ρίζες} \\ m_1 = m_2 \in \mathbb{R}$$

$$m_1 = m_2 = -\frac{a}{2}$$

$$y(x) = C_1 e^{m_1 x} + C_2 x e^{m_2 x}$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow \text{Δύο άνισες ρίζες} \\ m_1 \neq m_2 \in \mathbb{R}$$

$$m_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad m_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

$$y(x) = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow \text{Δύο άνισες μιγαδικές ρίζες} \\ m_1 \neq m_2 \in \mathbb{C}$$

$$m_1 = \frac{-a}{2} + i \sqrt{b - \frac{a^2}{4}} \quad m_2 = \frac{-a}{2} - i \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$$

$$y(x) = e^{px} [C_1 \cos(qx) + C_2 \sin(qx)] \quad p = \frac{-a}{2} \text{ και } q = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$$